

CHƯƠNG III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM

I. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm của** hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Định lý:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là **họ tất cả các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K .

2. TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$; $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- Nếu $F(x)$ có đạo hàm thì: $\int d(F(x)) = F(x) + C$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- Công thức đổi biến số:** Cho $y = f(u)$ và $u = g(x)$.

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$

3. SỰ TỒN TẠI CỦA NGUYÊN HÀM

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. $\int 0dx = C$	2. $\int dx = x + C$	
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	16. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	
4. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	17. $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{ax+b} + C$	

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	18. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	19. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	21. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	22. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
10. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	23. $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
11. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	24. $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
14. $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	27. $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
15. $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	28. $\int (1 + \cot^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

5. BẢNG NGUYÊN HÀM MỞ RỘNG

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$	$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \left \frac{x}{a} \right + C$	
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

6. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

a. Phương pháp đổi biến số

Nếu : $\int f(x)dx = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì :

$$\int f(u)du = F(\varphi(t)) + C$$

b. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Nếu $u(x), v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int u dv = uv - \int v du$ (với $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$)

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \neq 0.$

B. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx.$

C. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

D. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề sai $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx.$

Câu 2. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f'(x) = F(x).$

B. $F'(x) = f(x).$

C. $F(x) = f(x).$

D. $F(x) = f(x) + C.$

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề đúng: $F'(x) = f(x).$

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int 0dx = C.$

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

C. $\int x^\alpha dx = \alpha.x^{\alpha-1} + C.$

D. $\int dx = x + C$

Lời giải

Chọn C

Mệnh đề sai: $\int x^\alpha dx = \alpha \cdot x^{\alpha-1} + C$.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C$.

B. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

C. $\int \sin x dx = \sin x + C$.

D. $\int \sin x dx = -\sin x + C$

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề đúng $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

B. $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C$.

C. $\int a^x dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$.

D. $\int a^x dx = x a^{x-1} + C$.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int x^\alpha dx = (\alpha + 1) \cdot x^{\alpha+1} + C$.

B. $\int x^\alpha dx = x^\alpha \cdot \ln \alpha + C$.

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^\alpha}{\ln \alpha} + C$.

D. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề đúng: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\int \tan x dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C$.

B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

C. $\int \tan x dx = -\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\tan x + C$

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề đúng: $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

Câu 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$

B. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x + C.$

C. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

D. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\tan x + C.$

Lời giải

Chọn C

Mệnh đề đúng $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int dx = C.$

B. $\int dx = 1 + C.$

C. $\int dx = x + C.$

D. $\int dx = x^2 + C.$

Lời giải

Chọn C

Mệnh đề đúng: $\int dx = x + C.$

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

B. $\int \cos x dx = -\sin x + C.$

C. $\int a^x dx = a^x + C.$

D. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Câu 11. Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $f(x) = 3x^2.$

B. $f(x) = x^2.$

C. $f(x) = x^3.$

D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).$

Suy ra $F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = x^2.$

Câu 12. Công thức nguyên hàm nào sau đây là công thức sai?

A. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

C. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

Lời giải

Chọn A

Công thức $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ sai, công thức đúng là $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

Câu 13. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot f(x) + C$.

B. $\int f'(x)dx = f''(x) + C$.

C. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

D. $\int f'(x)dx = a \cdot f(ax+b) + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Câu 14. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng.

A. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a+b} F(ax+b) + C$.

B. $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$.

C. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

D. $\int f(ax+b)dx = aF(ax+b) + C$.

Lời giải

Chọn C

Công thức đúng $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Câu 15. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$.

A. $F(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{3}$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$

C. $F(x) = \frac{x^3}{2} + 2$

D. $F(x) = x^3$

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ nên $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Câu 16. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4}{\cos^2 x}$.

A. $F(x) = \frac{4x}{\sin^2 x}$.

B. $F(x) = 4 \tan x$.

C. $F(x) = 4 + \tan x$.

D. $F(x) = 4x + \frac{4}{3} \tan^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{4}{\cos^2 x} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 4 \cdot \tan x$.

Câu 17. Nguyên hàm của $f(x) = e^{5x}$ là?

- A. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$. B. $\frac{1}{5}e^{-5x} + C$. C. $e^{-5x} + C$. D. $e^{5x} + C$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot e^{5x} = e^{5x}$ nên $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 4x$.

- A. $\frac{\sin 4x}{4} + C$ B. $\frac{\sin 4x}{2} + C$ C. $\frac{-\sin 4x}{4} + C$ D. $\frac{\cos 4x}{4} + C$

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(\frac{1}{4} \cdot \sin 4x\right)' = \frac{1}{4} \cdot (\cos 4x) \cdot (4x)' = \cos 4x$ nên $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \cdot \sin 4x + C$.

Câu 19. Tính $I = \int (1 + \tan^2 x) dx$

- A. $I = \sin x + C$. B. $I = \cos x + C$. C. $I = \tan x + C$. D. $I = \cot x + C$

Lời giải

Chọn C

Vì $I = \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Câu 20. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau **sai**?

- A. $\int 0 dx = C$, (C là hằng số). B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, (C là hằng số).
C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, (C là hằng số). D. $\int dx = x + C$, (C là hằng số).

Lời giải

Chọn C

Vì $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, (C là hằng số) và $\alpha \neq -1$.

Câu 21. Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

- A. $f(\pi) = 1$. B. $f(\pi) = -3$. C. $f(\pi) = -1$. D. $f(\pi) = 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có:

$$f(x) = F'(x) = (\cos 2x - \sin x + C)' = -2\sin 2x - \cos x$$

Suy ra $f(\pi) = 1$.

Câu 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$.

B. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

D. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int (6x + \sin 3x) dx = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C = F(x)$$

Lại có: $F(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Câu 23. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{x+\ln 10}$ biết $F(1) = e$.

A. $F(x) = e^x$.

B. $F(x) = \frac{e^x}{10} + \frac{9e}{10}$.

C. $F(x) = 10e^x - 9e$.

D. $F(x) = 11e - 10e^x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{x+\ln 10} dx = e^{x+\ln 10} + C = e^x \cdot e^{\ln 10} + C = 10e^x + C$$

Vì $F(1) = e$ nên $10e + C = e \Rightarrow C = -9e$.

Vậy $F(x) = 10e^x - 9e$.

Câu 24. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.

C. $-\cot x + x^2$.

D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C \Rightarrow F(x) = x^2 - \cot x + C.$$

$$\text{Ta có } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ nên } C = -\frac{\pi^2}{16} \Rightarrow F(x) = x^2 - \cot x - \frac{\pi^2}{16}$$

Câu 25. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

B. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$.

C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5\sin x) dx = 3x + 5\cos x + C.$$

$$\text{Theo đề, } f(0) = 10 \text{ nên } 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 3x + 5\cos x + 5.$$

Câu 26. Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính $f(1) + f(0)$.

A. $2e - 2$.

B. $e - 4$.

C. $e - 2$.

D. $e - 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = F'(x) = (e^x - 2x^2)' = e^x - 4x$$

$$\text{Suy ra } f(1) = e - 4; f(0) = 1. \text{ Do đó } f(1) + f(0) = e - 3.$$

Câu 27. Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

A. $e^{2x} - 2x^2 + C$.

B. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

C. $2e^x - 2x^2 + C$.

D. $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 + C.$$

Câu 28. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C. \text{ Theo đề } F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Do đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$.

Câu 29. Cho $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2)dx$.

- A.** $2x^6 + x^2 + C$. **B.** $\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$. **C.** $4x^6 + 2x^2 + C$. **D.** $12x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int f(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2} \left(4(x^2)^3 + 2(x^2) \right) + C = 2x^6 + x^2 + C$.

Câu 30. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

- A.** $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. **C.** $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. **D.** $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A.** $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 32. Xác định a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.

A. $a = 1, b = -3, c = 2$.

B. $a = 1, b = -1, c = 1$.

C. $a = -1, b = 1, c = -1$.

D. $a = -1, b = -5, c = -7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } F'(x) = (2ax + b).e^{-x} - (ax^2 + bx + c).e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c].e^{-x}$$

$$\text{Có } F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = -1, b = 1, c = -1.$$

Câu 33. Gọi $F(x) = ax^2 + bx + c e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 1)^2 e^x$. Tính tổng $S = a + 2b + c$.

A. $S = 3$.

B. $S = -2$.

C. $S = 0$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x) = ax^2 + bx + c e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 1)^2 e^x$ nên

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow [ax^2 + 2a + b x + b + c]e^x = x^2 - 2x + 1 e^x$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có } \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -2 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}. \text{ Vậy } S = -2.$$

PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Cho hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó P và Q là các đa thức, và P không chia hết cho Q .

Hàm f được gọi là hàm phân thức hữu tỷ thực sự nếu $\deg(P) < \deg(Q)$.

Trong các bài toán tìm nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỷ, nếu $f(x)$ chưa phải là hàm phân thức hữu tỷ thực sự thì ta thực hiện chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số để được

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = S(x) + h(x)$$

Khi đó, $h(x)$ sẽ là hàm phân thức hữu tỷ thực sự.

Định lý: Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

Đó là các biểu thức có dạng $\frac{1}{x-a}$; $\frac{1}{(x-a)^k}$; $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$; $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ là các hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng. Để **tách được phân thức** ta dùng **phương pháp hệ số bất định**.

Chẳng hạn :

$$i/ \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$ii/ \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$iii/ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

VÍ DỤ MINH HỌA & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{x^2 + x}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) + C$$

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nên: } \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx. \\ &= 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x+2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{4x-3}{x^2-3x+2} = \frac{4x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}.$$

$$\text{Khi đó } (A+B)x - 2A - B = 4x - 3, \text{ đồng nhất hệ số thì ta được } \begin{cases} A+B=4 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int \frac{4x-3}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$$

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A+B=0 \\ A+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int \frac{1}{x^3+x^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C.$$

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$

Lời giải

Nhận thấy $x=1$ là nghiệm bội 3 của phương trình $(1-x)^3=0$, do đó ta biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^3} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} = \frac{A(x^2-2x+1) + B(1-x) + C}{(1-x)^3} \\ &= \frac{Ax^2 + (-2A-B)x + A+B+C}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Từ đây ta có
$$\begin{cases} A = 0 \\ -2A - B = 2 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 2 \end{cases}$$

Ta có
$$\int \frac{2x}{(1-x)^3} dx = \int \left(\frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

Câu 6. Họ nguyên hàm $\int \frac{x-1}{x^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + C.$ **B.** $\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$ **C.** $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + C.$ **D.** $\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$\int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}$$

Với $x > \frac{1}{2}$ thì $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x-1) + 2.$

Do đó, $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ là

A. $x - 4 \ln|x+1| + C.$ **B.** $x + \frac{4}{x+1} + C.$ **C.** $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{4}{x+1} + C.$ **D.** $x - \frac{4}{x+1} + C$

Lời giải

Chọn B

Xét
$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} dx = \int \left(1 - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx = x + \frac{4}{x+1} + C.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$ **B.** $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$
C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$ **D.** $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$

A. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C.$

B. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C.$

C. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln|4x-3| + C.$

D. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C.$

Câu 10. Nguyên hàm $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-1} dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

B. $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

C. $x + \frac{1}{x-1} + C.$

D. $x^2 + \ln|x-1| + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x-1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$$

Câu 11. $F(x) = \int \frac{6x+2}{3x-1} dx$ bằng

A. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

B. $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$

C. $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

D. $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{3x-1} \right) dx = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C.$

Câu 12. $\int \frac{(x+1)^2}{x^2} dx$ bằng

A. $x + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

B. $x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

C. $x - 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

D. $x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{(x+1)^2}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ là

- A.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$ **B.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| + C.$ **C.** $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$ **D.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.$

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$$

Câu 14. Biết $F(1) = \frac{1}{3}$. Khi đó một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ là

- A.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$ **B.** $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - \frac{8}{3}$
C. $F(x) = x^2 + x - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{3}$ **D.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Chia đa thức: } x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x + 1) - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 1 + \frac{-2}{x^2 + 2x + 1} = x + 1 - \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$$

$$\text{Mà } F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = -\frac{13}{6}. \text{ Vậy } \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}.$$

Câu 15. Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

- A.** $a+b=1.$ **B.** $a+b=5.$ **C.** $a+b=-5.$ **D.** $a+b=-1.$

Lời giải

Chọn D

$$\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x-2| + C.$$

$$\text{Vậy } a=2, b=-3. \text{ Do đó } a+b=-1.$$

DẠNG: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

PP1: Tính $I = \int f(x)dx$ sử dụng đổi biến $t = \varphi(x)$. (Đổi biến thông thường)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

Ta thực hiện theo các bước sau:

□ Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.

□ Bước 2: Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x)dx$.

□ Bước 3: Biểu thị: $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = g(t)dt$.

□ Bước 4: Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

* Chú ý: Ta có một số dấu hiệu để đổi biến thường gặp:

STT	Dạng nguyên hàm	Cách đặt	Đặc điểm nhận dạng
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$t = f(x)$	Biểu thức dưới mẫu
2	$\int f[e^{t(x)}]t'(x)dx$	$t = t(x)$	Biểu thức ở phần số mũ
3	$\int f[t(x)]t'(x)dx$	$t = t(x)$	Biểu thức trong dấu ngoặc
4	$\int f[\sqrt[n]{t(x)}]t'(x)dx$	$t = \sqrt[n]{t(x)}$	Căn thức
5	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$	$\frac{dx}{x}$ đi kèm biểu thức theo $\ln x$
6	$\int f(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$	$\cos x dx$ đi kèm biểu thức theo $\sin x$
7	$\int f(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$	$\sin x dx$ đi kèm biểu thức theo $\cos x$
8	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\tan x$
9	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$\frac{dx}{\sin^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\cot x$
10	$\int f(e^{ax})e^{ax} dx$	$t = e^{ax}$	$e^{ax} dx$ đi kèm biểu thức theo e^{ax}
Đôi khi thay cách đặt $t = t(x)$ bởi $t = m.t(x) + n$ ta sẽ biến đổi dễ dàng hơn.			

VÍ DỤ MINH HỌA & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Cho $\int f(x) dx = x^2 \ln x + C$. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = f(3x)$ là

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt.$$

Khi đó:

$$\int f(3x) dx = \int f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int f(t) dt = \frac{1}{3} (t^2 \ln t + C) = \frac{1}{3} (9x^2 \ln 3x + C) = 3x^2 \ln 3x + \frac{C}{3}.$$

Câu 2. Tìm nguyên hàm: $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

Lời giải

$$\text{Đặt } \ln x = t \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{t dt}{\sqrt{1+t}} = \int \left(\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right) dt = \frac{2}{3} \sqrt{(1+t)^3} - 2\sqrt{1+t} + C$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} - \sqrt{1+\ln x} \right) + C$$

Câu 3. Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 4e^{-x}}$

Lời giải.

Đặt

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t + \frac{4}{t}} = \int \frac{t dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 4)}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 4) + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 4) + C$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\sin^4 2x \cdot \cos^3 x}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} \cdot \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = -1$$

$$\text{Suy ra: } I = -16 \int \sin^4 x \cdot \cos^6 x \cos x dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ nên ta có:

$$I = -16 \int t^4 (1-t^2)^3 dt = 16 \int t^4 (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) dt$$

$$= 16 \left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{3} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^5}{5} \right) + C = 16 \left(\frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^9 x}{3} + \frac{3 \sin^7 x}{7} - \frac{\sin^5 x}{5} \right) + C$$

Câu 5. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- A.** $\int 2u(u^2 - 4) du$. **B.** $\int (u^2 - 4) du$. **C.** $\int 2(u^2 - 4) du$. **D.** $\int (u^2 - 3) du$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1}, u \geq 0 \text{ nên } u^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u du \\ x = u^2 - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u^2-1-3}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du.$$

Câu 6. Tính nguyên hàm $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** $A = \int dt$. **B.** $A = \int \frac{1}{t^2} dt$. **C.** $A = \int t dt$. **D.** $A = \int \frac{1}{t} dt$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Khi đó } A = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$. Tính $I = \int (x\sqrt{1+x^2}) dx$.

- A.** $\frac{x^2}{2} (\sqrt{1+x^2})^3 + C$. **B.** $\frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^6 + C$. **C.** $\frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 + C$. **D.** $\frac{x^2}{2} (\sqrt{1+x^2})^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx.$$

$$I = \int x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + C.$$

Câu 8. Xét $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây đúng.

- A.** $I = \int u^5 du$. **B.** $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$. **C.** $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$. **D.** $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{16}$; Suy ra: $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx = \frac{1}{16} \int u^5 du$.

Câu 9. Xét $I = \int \frac{1}{3 + \sqrt{2x+1}} dx$, đặt $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $I = u - 3 \ln 3 + C$. **B.** $I = u - 3 \ln u + C$.
C. $I = u - 3 + C$. **D.** $I = u - 3 \ln(3+u) + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = (2x+1) \Rightarrow u du = dx$.

Vậy $I = \int \frac{u}{3+u} du = \int \left(1 - \frac{3}{3+u}\right) du = u - 3 \ln(3+u) + C$.

Câu 10. Với $t = x \ln x$ thì nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$ được tính dưới dạng biến t như thế nào

- A.** $\ln t + C$. **B.** $\ln|t|$. **C.** $\ln t$. **D.** $\ln|t| + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$.

Đặt $x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt$. Khi đó ta có $I = \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{e^x}$. Bằng cách đặt $t = e^x$, chọn mệnh đề đúng

- A.** $I = \frac{1}{e^x} + C$. **B.** $I = -\frac{1}{e^x} + C$. **C.** $I = -e^x + C$. **D.** $I = e^x + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

$$I = \int \frac{dx}{e^x} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{e^x} + C.$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$ bằng phương pháp đặt $t = x^2 + 7$.

A. $\frac{1}{32} x^2 + 7^{16} + C.$

B. $-\frac{1}{32} x^2 + 7^{16} + C.$

C. $\frac{1}{2} x^2 + 7^{16} + C.$

D. $\frac{1}{16} x^2 + 7^{16} + C.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 + 7 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$.

Ta có $\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{2} \int t^{15} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C.$

Câu 13. $I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$ bằng phương pháp đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C.$

B. $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + C.$

D. $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow 2t dt = 2(x+1) dx \Rightarrow (x+1) dx = t dt$.

Do đó $F(x) = \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{t dt}{t} = t + C = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C.$

Câu 14. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ bằng phương pháp đặt $u = \sqrt{1-x}$.

A. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C.$

B. $-2\sqrt{1-x} + C.$

C. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}.$

D. $\sqrt{1-x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \sqrt{1-x} \Rightarrow u^2 = 1-x \Rightarrow 2u du = -dx$. Ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2u du}{u} = -2 \int du = -2u + C = -2\sqrt{1-x} + C.$$

Câu 15. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$ bằng cách đặt $t = e^x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $I = \ln|t| - \ln|t+1| + C.$

B. $I = \ln|t| + \ln|t+1| + C.$

C. $I = \ln|t+1| + C.$

D. $I = \ln|1-t| + C.$

Lời giải

Chọn A

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}.$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = \ln|t| - \ln|t+1| + C.$$

Câu 16. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng cách đặt $t = \frac{x-2}{x+1}$ là:

A. $\frac{1}{33}t^{10} + C.$

B. $\frac{1}{33}t^{11} + C.$

C. $\frac{1}{11}t^{11} + C.$

D. $\frac{1}{3}t^{11} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Biến đổi } I = \int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx = \int \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{10} \cdot \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{3}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{3} \int t^{10} dt = \frac{1}{33} t^{11} + C.$$

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^2}, x > 0$ bằng cách đặt $t = 2\sqrt{x} + 1$ là:

A. $-\frac{1}{2t} + C.$

B. $I = \frac{1}{t} + C$

C. $\frac{1}{2t} + C.$

D. $I = -\frac{1}{t} + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^2} dx$

Đặt $t = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Suy ra $I = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C.$

Câu 18. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $u^3 - u + C.$

B. $\frac{2u^3}{3} - 8u + C.$

C. $-\frac{2u^3}{3} - 8u + C.$

D. $\frac{2u^3}{3} + 8u + C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \sqrt{x+1}, u \geq 0$ nên $u^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u du \\ x = u^2 - 1 \end{cases}.$

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u^2-1-3}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du = \frac{2u^3}{3} - 8u + C.$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}$ Khi đặt $u = 1 + \cos x$ ta được:

A. $-u + \ln|u| + C.$

B. $\ln|u| + C.$

C. $-2u + 2\ln|u| + C.$

D. $-2u - 2\ln|u| + C.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = 1 + \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$F(x) = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{2(1-u)}{u} du = \int \left(\frac{2}{u} - 2 \right) du = -2u + 2\ln|u| + C.$

Câu 20. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ khi đặt $t = \sin 2x$ trở thành:

A. $\int (t^2 - t^4) dt$.

B. $\frac{1}{2} \int (t^2 - t^4) dt$.

C. $\int (t^2 + t^4) dt$.

D. $\frac{1}{2} \int (t^2 + t^4) dt$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot \cos 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos 2x dx$.

Ta có: $F(x) = \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int t^2 \cdot (1 - t^2) dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - t^4) dt$.

Câu 21. Cho họ nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x+3}}$ trên khoảng $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, ta được

$I = \int \frac{m}{t^2 + n} dt$ (với $m, n \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 3m + n$.

A. $T = 7$.

B. $T = 2$.

C. $T = 4$.

D. $T = 5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, ta được $t^2 = 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = 2dx \\ x = \frac{t^2 - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = t dt \\ x + 2 = \frac{t^2 + 1}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có $I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x+3}} = \int \frac{t dt}{\frac{t^2 + 1}{2} t} = \int \frac{2 dt}{t^2 + 1} = \int \frac{2}{t^2 + 1} dt$.

Vậy $m = 2, n = 1, T = 3m + n = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

Câu 22. Xét $I = \int x^7 (4x^4 - 3)^5 dx$ bằng cách đặt $t = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{4} \int (t^2 + 3t) dt$.

B. $I = \frac{1}{64} \int (t^6 + 3t^5) dt$.

C. $I = \frac{1}{4} \int t^5 dt$.

D. $I = \frac{1}{64} \int (t^2 + 3t) dt$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int x^7 (4x^4 - 3)^5 dx = \int x^4 (4x^4 - 3)^5 x^3 dx.$

Đặt $t = 4x^4 - 3 \Rightarrow dt = 16x^3 dx.$

Vậy $I = \int \frac{t+3}{4} \cdot t^5 \cdot \frac{1}{16} dt = \frac{1}{64} \int (t^6 + 3t^5) dt.$

Câu 23. Xét $I = \int \frac{f^5(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{(f(x))^2 + 1}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt.$

B. $I = \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t} dt.$

C. $I = \int (t^4 - 2t^2 + 1) t dt.$

D. $I = \int (t^2 - 2t + 1) dt.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{(f(x))^2 + 1} \Rightarrow t^2 = (f(x))^2 + 1 \Rightarrow 2t dt = 2f(x) f'(x) dx \Rightarrow f(x) f'(x) dx = t dt$

$t^2 = (f(x))^2 + 1 \Rightarrow (f(x))^2 = t^2 - 1 \Rightarrow (f(x))^4 = (t^2 - 1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$

Vậy $I = \int \frac{f^5(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}} dx = \int \frac{f^4(x) \cdot f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}} dx = \int \frac{(t^4 - 2t^2 + 1)t}{t} dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt$

Câu 24. Xét $I = \int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$ bằng cách đặt $t = 1 + \sin^2 x$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

B. $I = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

C. $I = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$

D. $I = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$

Lời giải

Chọn B

Đặt: $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = t - 1 \\ 2 \sin x \cos x dx = dt \end{cases}$

Suy ra: $\frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{2} \frac{(t-1) dt}{t} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

Vậy: $I = \int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$

Câu 25. Xét $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx$ bằng cách đặt $t = \cot x$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = -\int (t^2 + t^4) dt$. **B.** $I = \int (t^2 + t^4) dt$.

C. $I = \int (t^2 + 2t^4 + t^6) dt$. **D.** $I = -\int (t^2 + 2t^4 + t^6) dt$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow \begin{cases} dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \\ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + t^2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx = \int \cot^2 x \left(\frac{1}{\sin^6 x} \right) dx = \int \cot^2 x \left[(1 + \cot^2 x)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right] dx = \int -t^2 (1 + t^2)^2 dt$$

$$\text{Vậy } I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx = -\int (t^2 + 2t^4 + t^6) dt$$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Bằng cách đặt $t = \sqrt{x}$, nguyên

hàm $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} f(t) + C$. **B.** $f(t) + C$. **C.** $-2f(t) + C$. **D.** $2f(t) + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt.$$

$$\text{Do đó } \int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int f'(t) 2dt = 2 \int f'(t) dt = 2f(t) + C.$$

PP2: Tính $I = \int f(x)dx$ sử dụng đổi biến $x = \varphi(t)$. (Đổi biến **BẰNG PP LƯỢNG GIÁC HÓA**)

PHƯƠNG PHÁP

- Nếu xuất hiện $\sqrt{a^2 - x^2}$ đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$, điều kiện $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- Nếu xuất hiện $\sqrt{x^2 - a^2}$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$, điều kiện $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
- Nếu xuất hiện $x^2 + a^2$ đặt $x = a \tan t$, điều kiện $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
- Nếu xuất hiện $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ ($a < b$), đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$, điều kiện $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Nếu xuất hiện $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ đặt $x = a \cos 2t$, điều kiện $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

VÍ DỤ MINH HỌA & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Cho $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Bằng cách đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, hãy viết lại nguyên hàm $\int f(x)dx$ theo biến t .

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

Khi đó

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Câu 2. Tính $\int \frac{dx}{1+x^2}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\text{Vậy } \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = t + C = \arctan x + C.$$

Câu 3. Khi đặt $x = \sin t$ họ nguyên hàm $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ có dạng $\frac{t}{a} - \frac{\sin 4t}{b} + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a + b$.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt, 1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$\text{Khi đó } I = \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int \sin^2 t \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$\text{Mặt khác } \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t \Rightarrow \sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} = \frac{1 - \cos 4t}{8}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} + C = \frac{t}{a} - \frac{\sin 4t}{b} + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow S = 40.$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t) dt = (1 + x^2) dt$$

$$\text{Khi đó } I = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{(1+x^2) dt}{(1+x^2) \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int \frac{dt}{\frac{1}{\cos t}} = \int \cos t dt$$

$$= \sin t + C = \sin(\arctan x) + C.$$

Câu 5. Hãy tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \frac{2}{\sin t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} dx = d\left(\frac{2}{\sin t}\right) = \frac{-2 \cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 t} - 4} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{-2 \cos t dt}{\frac{8 \cos t}{\sin^2 t}} = -\frac{1}{4} \int \sin t dt = \frac{1}{4} \cos t + C$$

$$\text{Từ } x = \frac{2}{\sin t} \Rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + C.$$

Câu 6. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$ trên khoảng $(1 + \sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - 3}} \xrightarrow{t=x-1} I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{3})^2}}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\sqrt{3}}{\sin u}, u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dt = d\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin u}\right) = \frac{-\sqrt{3} \cos u du}{\sin^2 u} \\ \sqrt{t^2 - 3} = \sqrt{\frac{3}{\sin^2 u} - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{-\sqrt{3} \cos u du}{\sin^2 u} \\ \sqrt{t^2 - 3} = \sqrt{3} \cot u \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 3}} = \int \frac{-\sqrt{3} \cos u du}{\sin^2 u \cdot \sqrt{3} \cot u} = -\int \frac{\sin u du}{\sin^2 u} = \int \frac{d(\cos u)}{1 - \cos^2 u} = \int \frac{d(\cos u)}{(1 - \cos u)(1 + \cos u)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos u}{1 - \cos u} \right| + C$$

$$\text{Với } t = \frac{\sqrt{3}}{\sin u} \Rightarrow \cos^2 u = 1 - \frac{3}{t^2} \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{t^2 - 3}}{t}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{t^2 - 3}}{t}}{1 - \frac{\sqrt{t^2 - 3}}{t}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}{x-1}}{1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}{x-1}} \right| + C.$$

Câu 7. Đặt $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \sqrt{4 - x^2} dx$ trở thành

A. $4 \cdot \int \cos^2 t \cdot dt$ **B.** $-4 \cdot \int \cos^2 t \cdot dt$ **C.** $4 \cdot \int \sin^2 t \cdot dt$ **D.** $-4 \cdot \int \sin^2 t \cdot dt$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } x = 2 \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right). \text{ Suy ra } dx = 2 \cos t \cdot dt$$

$$I = \int \sqrt{4 - x^2} dx = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t \cdot dt = 4 \cdot \int \cos^2 t \cdot dt$$

Câu 8. Đặt $x = \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ trở thành

A. $-\int dt$. **B.** $\int t dt$. **C.** $\int dt$. **D.** $-\int t dt$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right). \text{ Suy ra } dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int dt$$

Câu 9. Đổi biến số $x = 4 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \sqrt{16 - x^2} dx$ trở thành

- A.** $-16 \int \cos^2 t dt$. **B.** $8 \int (1 + \cos 2t) dt$ **C.** $16 \int \sin^2 t dt$ **D.** $8 \int (1 - \cos 2t) dt$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 4 \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $dx = 4 \cos t dt$

$$I = \int \sqrt{16 - x^2} dx = \int \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int \cos^2 t dt = 16 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8 \int (1 + \cos 2t) dt$$

Câu 10. Đổi biến số $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ trở thành

- A.** $\int dt$. **B.** $\int t dt$. **C.** $-\int dt$. **D.** $-\int t dt$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = 2 \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $dx = 2 \cos t dt$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} = \int \frac{2 \cos t dt}{2 \cos t} = \int dt$$

Câu 11. Đổi biến số $x = \frac{1}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx$ trở thành

- A.** $-\int \cos^2 t dt$. **B.** $\int \sin^2 t dt$. **C.** $\int \cos^2 t dt$. **D.** $-\int \sin^2 t dt$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$. Suy ra $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = -\int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}}{\frac{1}{\sin^3 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \cos^2 t dt$$

Câu 12. Đổi biến số $x = \sqrt{3} \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x^2 + 3} dx$ trở thành

- A.** $\frac{-\sqrt{3}}{3} \int dt$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{3} \int t dt$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3} \int t dt$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3} \int dt$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \int \frac{1}{3 \tan^2 t + 3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int dt$$

Câu 13. Đổi biến số $x = \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 1} dx$ trở thành

A. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 t} - 8 \right) dt$. **B.** $\int \left(\frac{3}{\cos^2 t} + 8 \right) dt$ **C.** $-\int \left(\frac{3}{\cos^2 t} + 8 \right) dt$ **D.** $\int \left(-\frac{3}{\cos^2 t} + 8 \right) dt$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$I = \int \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 1} dx = \int \left(3 - \frac{8}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(3 - \frac{8}{\tan^2 t + 1} \right) \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \left(\frac{3}{\cos^2 t} - 8 \right) dt$$

Câu 14. Đổi biến số $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ trở thành

A. $\int 16 \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$. **B.** $8 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$ **C.** $-16 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$ **D.** $-8 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = 2 \cos t dt$

$$I = \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int 4 \sin^2 t \cdot \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int 16 \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$$

Câu 15. Đổi biến số $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{(4 - x^2) \sqrt{4 - x^2}}$ trở thành :

A. $\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\cos^2 t}$. **B.** $\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t}$ **C.** $\frac{1}{8} \int \frac{dt}{\cos^2 t}$ **D.** $\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sin^2 t}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 2 \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = 2 \cos t dt$

$$I = \int \frac{dx}{(4 - x^2) \sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2 \cos t dt}{(4 - 4 \sin^2 t) \sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} = \int \frac{2 \cos t dt}{8 \cdot \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Câu 16. Đổi biến số $x = \cos 2t$ với $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ thì nguyên hàm $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ trở thành :

A. $-2 \int (1 + \cos 2t) dt$. **B.** $4 \int \cos^2 t dt$ **C.** $2 \int (1 - \cos 2t) dt$ **D.** $4 \int \sin^2 t dt$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \cos 2t$ với $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = -2 \sin 2t \cdot dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} \cdot (-2 \sin 2t \cdot dt) = -4 \int \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin t \cdot \cos t \cdot dt = -4 \int \cos^2 t dt \\ &= -2 \int (1 + \cos 2t) dt \end{aligned}$$

Câu 17. Với phương pháp đổi biến số $x = 3 \tan t$, nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$ trở thành:

- A.** $\frac{1}{2}t^2 + C$. **B.** $\frac{1}{3}t + C$. **C.** $t^2 + C$. **D.** $t + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $x = 3 \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt$.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \int \frac{3}{9(1 + \tan^2 t) \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{3} dt = \frac{t}{3} + C.$$

Câu 18. Khi tính nguyên hàm $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ bằng cách đặt $x = 2 \tan t$ ta được nguyên hàm nào?

- A.** $t + C$. **B.** $\frac{1}{4+t^2} + C$. **C.** $-\frac{1}{2}t + C$. **D.** $\frac{1}{2}t + C$.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int f(x) dx = \int \frac{1}{4+x^2} dx$ (*).

Đặt $x = 2 \tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $dx = 2(1 + \tan^2 t) dt$.

Thay vào (*) ta được $I = \int \frac{1}{4+4\tan^2 t} \cdot 2(1 + \tan^2 t) dt = \int \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}t + C$

Câu 19. Xét $f(x) = \sqrt{3-x^2}$. Bằng cách đặt $x = \sqrt{3} \sin t$, nguyên hàm của $f(x)$ là.

- A.** $\frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \sin 2t + C$. **B.** $\sqrt{3 \sin t} + C$. **C.** $\frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \sin 2t + C$. **D.** $\sqrt{3 - \sin t} + C$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int f(x) dx = \int \sqrt{3-x^2} dx$ (*).

Đặt $x = \sqrt{3} \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ thì $dx = \sqrt{3} \cos t dt$ và $\cos t \geq 0$.

Thay vào (*) ta được

$$I = \int \sqrt{3-3\sin^2 t} \sqrt{3} \cos t dt = \int 3 \cos^2 t dt \Leftrightarrow I = \int \frac{3(1+\cos 2t)}{2} dt = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + C$$

Câu 20. Xét $I = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$ bằng cách đặt $x = 1 + 2 \sin t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khẳng định nào sau đây

đúng?

A. $\int \sin t dt$.

B. $\int -dt$.

C. $\int \cos t dt$.

D. $\int dt$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$.

Đặt $x-1 = 2 \sin t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases} dx = 2 \cos t dt \\ \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \frac{1}{2 \cos t} \end{cases}$.

Suy ra $\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx = \int \frac{1}{2 \cos t} \cdot 2 \cos t dt = \int dt$.

DẠNG: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

LÝ THUYẾT: Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx \quad \text{HAY} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bước 1: Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng: $I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$.

Bước 2: Đặt $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f_1'(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $\int u.dv = u.v - \int v.du$.

2. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: $I = \int P(x) \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix} .dx$.

Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix} .dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' .du = P'(x)dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} \end{cases}$. Vậy $I = P(x) \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} .P'(x)dx$.

DẠNG 2: $I = \int P(x). \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$.

Vậy $I = \ln x . Q(x) = \int Q(x) . \frac{1}{x} dx$.

DẠNG 3: $I = \int e^x \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} .dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$.

Vậy $I = e^x \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$.

VÍ DỤ MINH HỌA & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Tính nguyên hàm $\int x \sin x dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int (5x+1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C = (5x-4)e^x + C.$$

$$\text{Mặt khác } F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7.$$

$$\Rightarrow F(x) = (5x-4)e^x + 7.$$

$$\text{Vậy } F(1) = e + 7.$$

Câu 3. Tìm nguyên hàm $I = \int x.e^x dx$

Lời giải

$$+ \text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$+ I = \int x.e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm $I = \int x.\sin 2x dx$

Lời giải

$$+ \text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$+ I = \int x.\sin 2x dx = \frac{-x}{2}.\cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{-x}{2}.\cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1+e^x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int 2x(1+e^x) dx = 2 \int x dx + 2 \int x e^x dx.$$

Gọi $I = 2 \int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $I = 2xe^x - 2 \int e^x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int 2x(1+e^x)dx &= 2 \int xdx + xe^x - 2 \int e^x dx = x^2 + xe^x - 2x + C \\ &= 2x - 2e^x + x^2 + C. \end{aligned}$$

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $I = \int 1+2x (\cos x + 1)dx$ là

Lời giải

Ta có

$$\int f(x) dx = \int 1+2x \cos x + 1 dx = \int 1+2x \cos x dx + \int 1 dx$$

$$\text{Tính } \int 1 dx = x + C_1$$

$$\text{Tính } \int 1+2x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1+2x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int 1+2x \cos x dx = 1+2x \sin x - 2 \int \sin x dx = 1+2x \sin x + 2 \cos x + C_2$$

$$\text{Do đó } I = x + x^2 + 1+2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Câu 7. Biết $\int (x+3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int (x+3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+3) - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+6+1) + C = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+7) + C \Rightarrow m=4; n=7.$$

$$\text{Vậy: } S = m^2 + n^2 = 65.$$

Câu 8. Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính tích ab .

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Vậy: $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow ab = -\frac{1}{8}$.

Câu 9. Tính nguyên hàm $I = \int \sin x \cdot e^x dx$, ta được:

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$I = e^x \sin x - \int \cos x e^x dx = e^x \sin x - J.$$

$$\text{Tính } J = \int \cos x e^x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được: $J = e^x \cos x + \int \sin x e^x dx = e^x \cos x + I$.

$$\text{Do đó } I = e^x \sin x - J = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \Leftrightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x = e^x (\sin x - \cos x).$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Câu 10. Kết quả của $\int \ln x dx$ là

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C.$$

Câu 11. Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là.

Lời giải

Tính $\int x \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x dx = dv \\ \ln x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} x^2 \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } \int f(x) dx &= \int x \ln(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C. \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong bước chọn v ta có thể áp dụng kỹ thuật thêm bớt hệ số để bài toán đơn giản hơn.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = \frac{x^2-4}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int (x-2) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + C$$

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

Lời giải

$$I = \int f(x) dx = \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\Rightarrow I = 2 \int t^2 \ln t^2 dt = 4 \int t^2 \ln t dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt \right) = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C \right) = \frac{2}{9} t^3 (3 \ln t - 1) + C$$

$$= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln \sqrt{x} - 1) + C$$

$$= \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$$

Câu 14. Tìm số thực dương a . Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$

$$\text{thỏa mãn } F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \text{ và } F(2018) = e^{2018}.$$

Lời giải

$$I = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int \frac{e^x}{x} dx \quad (1)$$

• Tính $\int e^x \ln(ax) dx$:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \ln(ax) dx = e^x \ln(ax) - \int \frac{e^x}{x} dx + C$$

• Thay vào (1), ta được: $F(x) = e^x \ln(ax) + C$.

$$\text{Với } \begin{cases} F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ F(2018) = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{a}} \cdot \ln 1 + C = 0 \\ e^{2018} \ln(a \cdot 2018) + C = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \ln(a \cdot 2018) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{e}{2018}.$$

Câu 15. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^3 + x^2 + x) \ln(x^2 + x)$ và $F(1) = -\frac{13}{18}$.

Tìm $F(x)$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int (x^3 + x^2 + x) \ln(x^2 + x) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + x) \\ dv = (x^3 + x^2 + x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\ v = \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \end{cases}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x^3 + x^2 + x) \ln(x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \ln(x^2 + x) - \frac{1}{12} \int (3x^3 + 4x^2 + 6x) \frac{2x+1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \ln(x^2 + x) - \frac{1}{12} \int (3x^3 + 4x^2 + 6x) \left(2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \ln(x^2 + x) - \frac{1}{12} \int \left(6x^3 + 5x^2 + 11x - 5 + \frac{5}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \ln(x^2 + x) - \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 + \frac{11}{2} x^2 - 5x + 5 \ln(x+1) \right) + C \end{aligned}$$

Do $F(1) = -\frac{13}{18}$ nên $C = -\frac{2}{3} \ln 2$.

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{12} (3x^4 + 4x^3 + 6x^2) \ln(x^2 + x) - \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 + \frac{11}{2} x^2 - 5x + 5 \ln(x+1) \right) - \frac{2}{3} \ln 2$$

Câu 16. Biết rằng $\int \left(2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x \right) dx = \frac{a}{3} \left(\sqrt{x^2+1} \right)^3 + \frac{b}{6} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Tìm a, b .

Lời giải

$$I = \int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = \int (2x\sqrt{x^2+1}) dx + \int (x \ln x) dx.$$

$$\text{Đặt } I_1 = \int (2x\sqrt{x^2+1}) dx; I_2 = \int (x \ln x) dx.$$

$$\text{Ta có: } I_1 = \int (2x\sqrt{x^2+1}) dx = \int (\sqrt{x^2+1}) d(x^2+1) = \frac{2}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + C_1.$$

$$\text{Tính } I_2 = \int (x \ln x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ v = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I_2 = \int (x \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_2.$$

Nên

$$I = \int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = \int (2x\sqrt{x^2+1}) dx + \int (x \ln x) dx = \frac{2}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$\text{Để } \int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = \frac{a}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \text{ thì } a=2; b=3 \in \square.$$

Câu 17. Phát biểu nào sau đây là đúng

A. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}. \text{ Ta có } \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Câu 18. Để tính $\int x \ln(2+x) dx$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A. $\begin{cases} u = x \\ dv = \ln(2+x) dx \end{cases}.$

B. $\begin{cases} u = x \ln(2+x) \\ dv = dx \end{cases}.$

C. $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ dv = dx \end{cases}.$

D. $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ dv = x dx \end{cases}.$

Lời giải

Chọn D

Câu 19. Tìm $\int x \sin x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x \sin x + \cos x + C.$

B. $-x \cos x + \sin x + C.$

C. $x \sin x + \cos x.$

D. $-x \cos x + \sin x.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \int x \sin x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Câu 20. Họ nguyên hàm của $\int x e^x dx$ là:

- A.** $I = e^x + x e^x + C$. **B.** $I = -e^x + x e^x + C$. **C.** $I = -e^x - x e^x + C$. **D.** $I = e^x - x e^x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = x e^x - \int e^x dx \Rightarrow I = x e^x - e^x + C.$$

Câu 21. Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

- A.** $x \ln x + x + C$. **B.** $-x \ln x + x + C$. **C.** $x \ln x + C$. **D.** $x \ln x - x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int \ln x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Câu 22. Họ các nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là :

- A.** $x \tan x - \ln |\cos x| + C$ **B.** $x \tan x + \ln (\cos x) + C$
C. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$ **D.** $x \tan x - \ln |\sin x| + C$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

Câu 23. Họ các nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là :

A. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$

B. $-x \cot x + \ln|\sin x| + C$

C. $-x \tan x + \ln|\cos x| + C$

D. $x \tan x - \ln|\sin x| + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln|\sin x| + C$

Câu 24. Họ các nguyên hàm của $f(x) = xe^{-x}$ là :

A. $-(x+1)e^{-x} + C$

B. $(x-1)e^{-x} + C$

C. $(x+1)e^{-x} + C$

D. $-(x-1)e^{-x} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int xe^{-x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$

Câu 25. Họ các nguyên hàm của $f(x) = (x+1)e^x$ là :

A. $xe^x + C$

B. $(x+1)e^x + C$

C. $e^x + C$

D. $(x-1)e^x + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int (x+1)e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$

Câu 26. Để tính $\int x \cos x dx$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A. $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$

B. $\begin{cases} u = x \cos x \\ dv = dx \end{cases}$

C. $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = x dx \end{cases}$

D. $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = dx \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Câu 27. Biết $\int 3x \cos(2x-5) dx = F(x) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $F(x) = \frac{3x}{2} \sin(2x-5) + \frac{3}{4} \cos(2x-5)$

B. $F(x) = \frac{3x}{2} \sin(2x-5) - \frac{3}{4} \cos(2x-5)$

C. $F(x) = 3x \sin(2x-5) - 3 \cos(2x-5)$

D. $F(x) = 3x \sin(2x-5) + 3 \cos(2x-5)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x \\ dv = \cos(2x-5) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = \frac{1}{2} \sin(2x-5) \end{cases}$$

$$\int 3x \cos(2x-5) dx = \frac{3x}{2} \sin(2x-5) + \frac{3}{2} \int \sin(2x-5) dx = \frac{3x}{2} \sin(2x-5) - \frac{3}{4} \cos(2x-5) + C$$

Câu 28. Tính $\int -x \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$ là kết quả nào dưới đây?

A. $\frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

B. $\frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

C. $\frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

D. $-\frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = -x \\ dv = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\int -x \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{x}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Câu 29. Nguyên hàm của $\int x e^{3x-1} dx$ là

A. $\frac{x}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{9} e^{3x-1} + C$

B. $\frac{x}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{3} e^{3x-1} + C$

C. $\frac{1}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{9} e^{3x-1} + C$

D. $\frac{1}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{3} e^{3x-1} + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x-1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x-1} \end{cases}$$

$$\int x e^{3x-1} dx = \frac{x}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{3} \int e^{3x-1} dx = \frac{x}{3} e^{3x-1} - \frac{1}{9} e^{3x-1} + C$$

Câu 30. Nguyên hàm của $\int (x^2 + x) \ln x dx$ là kết quả nào dưới đây?

A. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x + \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + C$

B. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$

C. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + C$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 + x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int (x^2 + x) \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \int \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$$

Câu 31. Một nguyên hàm của hàm số $x \ln(x^2 + x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) - \frac{1}{2}(x^2 - x - \ln|x+1|) + 2$

B. $\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) + \frac{1}{2}(x^2 - x - \ln|x+1|)$

C. $\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) + \frac{1}{2}(x^2 + x - \ln|x+1|)$

D. $\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) + \frac{1}{2}(x^2 - x + \ln|x+1|) + 2019$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x \ln(x^2 + x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) - \frac{1}{2} \int \left[(2x-1) - \frac{1}{1+x} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x) - \frac{1}{2}(x^2 - x - \ln|x+1|) + C$$

Câu 32. Nguyên hàm của $\int x^2 \cos x dx$ là kết quả nào dưới đây?

A. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

B. $x^2 \sin x - 2x \cos x - 2 \sin x + C$

C. $x^2 \sin x - 2x \cos x - 2 \sin x + C$

D. $x^2 \sin x + 2x \cos x - \sin x + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int 2x \sin x dx = -2x \cos x + 2 \int \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x + C$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

Câu 33. Cho $\int x^2 e^x dx$ bằng cách đặt $u = x^2, dv = e^x dx$ chọn kết quả đúng?

A. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx + C$

B. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x - 2 \int e^x dx + C$

C. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int e^x dx + C$

D. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x - \int e^x dx + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - 2 \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx + C$$

Câu 34. Biết $F(x) = a \ln x + \left(b - \frac{c}{x}\right) \ln(2x+3)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{x^2}$. Tính

$$S = a - b + c.$$

A. $S = \frac{7}{3}.$

B. $S = \frac{4}{3}.$

C. $S = \frac{1}{3}.$

D. $S = -1.$

Lời giải

Chọn A

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{x^2}$ là:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(2x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln(2x+3) - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{2}{2x+3} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln(2x+3) - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{2}{2x+3} dx \\ &= -\frac{\ln(2x+3)}{x} + \frac{2}{3} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+3} \right) dx = -\frac{\ln(2x+3)}{x} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{2}{3} \ln(2x+3) + C \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \ln x + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{x} \right) \ln(2x+3) + C$$

$$\Rightarrow F(x) = a \ln x + \left(b + \frac{c}{x} \right) \ln(2x+3) = -\frac{\ln(2x+3)}{x} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{2}{3} \ln(2x+3) + C, \text{ với } C=0.$$

$$\Rightarrow a-b+c = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) + 1 = \frac{7}{3}$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. **B.** $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **C.** $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **D.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Vậy $\int g(x)dx = (x+1)f(x) - \int f(x)dx \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \ln x$ và $f(1) = 2$. Tính $f(e)$.

A. $f(e) = 3$. **B.** $f(e) = e+3$. **C.** $f(e) = e$. **D.** $f(e) = e-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$.

Ta có $f(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Theo đề: $f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 3$. Do đó: $f(x) = x \ln x - x + 3$

Vậy: $f(e) = e \ln e - e + 3 = 3$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2x \ln(x-1)$ và $f(2) = 1$. Tính $f(3)$.

A. $f(3) = 8 \ln 2 - \frac{5}{2}$. **B.** $f(3) = 8 \ln 2 + \frac{3}{2}$.

C. $f(3) = 6\ln 2 - \frac{9}{2}$.

D. $f(3) = 6\ln 2 - \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x \ln(x-1) dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$.

Ta có $f(x) = \int 2x \ln(x-1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \int (x+1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$.

Theo đề: $f(2) = 1 \Leftrightarrow 3\ln(1) - 2 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 5$.

Do đó: $f(x) = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + 5$.

Vậy $f(3) = 8\ln 2 - \frac{5}{2}$.

Câu 38. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Do đó $F(x) = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

Câu 39. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 40. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của

$F(-1) + F(2)$ bằng

- A.** $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3} \ln 2$. **D.** $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Tính } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$$

$$\text{Lại có } F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left(-\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$$

Câu 41. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A.** $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$. **B.** $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$.
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$. **D.** $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết, suy ra } f(x).e^{2x} = F'(x) = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{e^x} \Rightarrow f'(x).e^{2x} = (1-x)e^x.$$

$$\text{Khi đó } \int f'(x).e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 - x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx = (1-x)e^x + \int e^x dx = (1-x)e^x + e^x + C = (2-x)e^x + C$$

Câu 42. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \tan^2 x$.

- A.** $\int x \tan^2 x dx = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $\int x \tan^2 x dx = x \tan x - \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$.
C. $\int x \tan^2 x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + C$. **D.** $\int x \tan^2 x dx = -x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\int x \tan^2 x dx = \int x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \int x dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Tính } \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{Vậy } \int x \tan^2 x dx = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

- A.** $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$. **B.** $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
C. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. **D.** $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x + 1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int (2x + 1) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}.$$

$$I_1 = (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x + 1) dx$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2.$$

$$\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = I_1 + I_2$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Câu 44. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx$ bằng

- A.** $-x^2 + 2x + C$. **B.** $-x^2 + x + C$. **C.** $2x^2 - 2x + C$. **D.** $-2x^2 + 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

Do $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$ nên $f(x) \cdot e^{2x} = F'(x) = 2x$.

Xét $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases} \text{ ta có:}$$

$$\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = f(x) \cdot e^{2x} - 2 \int f(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$$

Câu 45. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A.** $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. **B.** $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.
- C.** $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. **D.** $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải

Vì $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Xét } f'(x) \ln x = \frac{2}{x^3} \ln x; I = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{2x^2} \end{cases} ; I = uv - \int v du = 2 \cdot \frac{-\ln x}{2x^2} + 2 \cdot \int \frac{1}{2x^3} dx$$

$$= -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \right) + C.$$

Câu 46. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2 e^{ax}$ ($a \neq 0$), sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0 < a \leq 1$.

B. $a < -2$.

C. $a \geq 3$.

D. $1 < a < 2$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int x^2 e^{ax} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} A \quad (1)$$

$$\text{Xét } A = \int x e^{ax} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } F(x) = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^2} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + C.$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1 \Rightarrow \frac{1}{a^3} e - \frac{2}{a^3} e + \frac{2}{a^3} e + C = \frac{2}{a^3} + 1 + C$$

$$\Rightarrow a^3 = e - 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{e-2} \Rightarrow 0 < a \leq 1.$$

Câu 47. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e}$.

B. $\frac{1}{e}$.

C. e .

D. $\frac{e}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) + f'(x) = x \quad (1).$$

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = x \cdot e^x$.

$$\text{Hay } [e^x \cdot f(x)]' = x \cdot e^x \Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int x \cdot e^x dx.$$

Xét $I = \int x.e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{cases}$.

$I = \int x.e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$. Suy ra $e^x f(x) = x.e^x - e^x + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 1$ nên $C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x.e^x - e^x + 2}{e^x} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{e}$.